

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПЕРЕНОСА МАССЫ И ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СТРУЯХ КОНВЕКТИВНЫХ ОБЛАКОВ

Цель работы:

Разработка методов расчета полей турбулентности и концентрации диффундирующего вещества (частиц аэрозоля) во внутриоблачной струе применительно к проблеме искусственного регулирования осадков.

Задачи исследования:

- построить кинематическую модель внутриоблачной струи, базирующуюся на результатах метеорологических исследований и воспроизводящую наблюдаемые трехмерные явления;
- при описании турбулентности учесть ее генерацию за счет неустойчивости течения при больших числах Рейнольдса, ее вязкую диссипацию, конвективный и диффузионный перенос;
- построить модель распространения дисперсных частиц в струе применительно к задаче искусственного воздействия на облака;
- построить алгоритм численной реализации математической модели турбулентности в облаке и диффузии аэрозольных частиц;
- провести на теоретическом уровне исследование сходимости вычислительной схемы;
- создать программный комплекс для расчета полей турбулентности и концентрации вещества, имеющий удобный пользовательский интерфейс;
- провести численное исследование погрешности и устойчивости вычислительной схемы;
- провести численный эксперимент по расчету полей характеристик турбулентности и концентрации аэрозоля, дать анализ полученных результатов; сопоставить их с эмпирическими данными и сформулировать практические рекомендации по использованию полученных результатов в проблеме искусственного воздействия на облака.

ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ:

1. Модель внутриоблачных турбулентных потоков, учитывающая их струйный характер, осевую симметрию, генерацию турбулентности за счет неустойчивости течения, ее конвективно-диффузионный перенос и вязкую диссипацию.

2. Модель переноса вещества струйными потоками, учитывающая их осевую симметрию и процессы конвекции, диффузии, распада и другие способы выведения вещества из среды либо генерацию частиц источником.

3. Вычислительный алгоритм решения модельной задачи, построенный с использованием линеаризации нелинейных уравнений, методов расщепления многомерных задач, взвешенной невязки в рамках конечноэлементного подхода и конечных разностей, и доказательство сходимости вычислительного процесса с обоснованием его порядка аппроксимации и устойчивости методом энергетических норм.

4. Программный комплекс (свидетельство об официальной регистрации № 2004612018 от 03.09.2004 г.), реализующий вычислительный алгоритм.

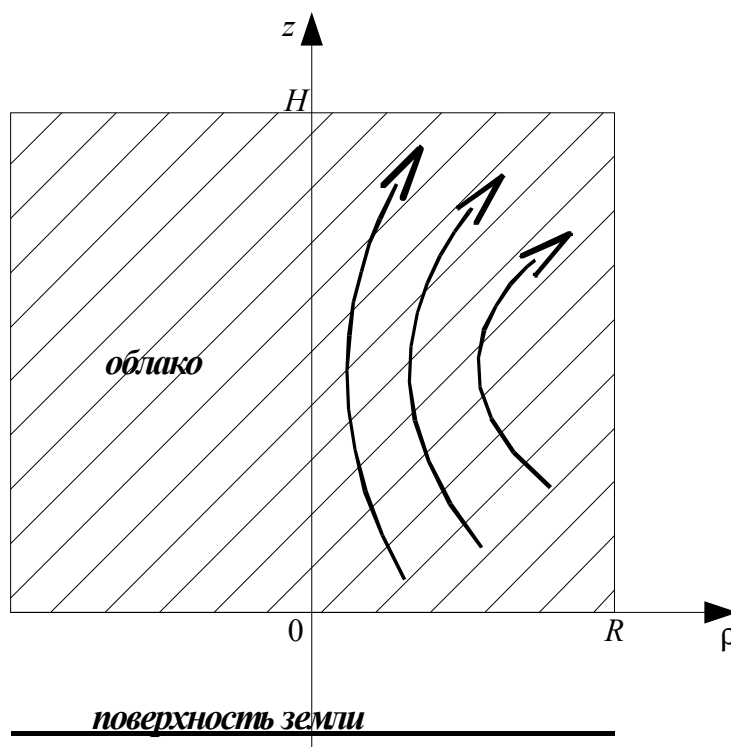
5. Результаты исследования точности приближенных вычислений, установление границ параметров, выбираемых в численных методах для устранения нефизического поведения приближенных решений (например, возникновения отрицательной концентрации вещества).

6. Результаты вычислительного эксперимента, позволившие выявить особенности развития турбулентности и распространения аэрозоля во внутриоблачной струе. Сопоставление результатов моделирования с данными метеорологических измерений.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АЭРОЗОЛЯ ВО ВНУТРИОБЛАЧНОЙ СТРУЕ

Основные физические величины:

q — концентрация
 диффундирующего аэрозоля,
 V — скорость воздушных
 потоков,
 K — коэффициент
 турбулентности,
 k — плотность кинетической
 энергии турбулентности,
 ε — скорость диссипации
 турбулентной энергии.



Исходная система уравнений

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha q + V_\rho \frac{\partial q}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{K}{\sigma_l} \frac{\partial q}{\partial \rho} \right) + V_z \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K}{\sigma_l} \frac{\partial q}{\partial z} \right) = S, \quad (1)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + V_\rho \frac{\partial k}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{K}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial \rho} \right) + V_z \frac{\partial k}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) = K \cdot D[V] - \varepsilon, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V_\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{K}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) + V_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = c_{1\varepsilon} c_\mu k \cdot D[V] - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (3)$$

$$K = c_\mu k^2 / \varepsilon,$$

$$D[V] = 2 \left(\frac{V_\rho}{\rho} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial \rho} + \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \right)^2,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_l = 0.7, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad c_{1\varepsilon} = 1.44, \quad c_{2\varepsilon} = 1.92, \quad c_\mu = 0.09,$$

$$q|_{t=0} = q_0(\rho, z), \quad q|_{\Gamma} = q_\Gamma(\rho, z, t), \quad k|_{t=0} = k_0(\rho, z), \quad k|_{\Gamma} = k_\Gamma(\rho, z, t), \quad \varepsilon|_{t=0} = \varepsilon_0(\rho, z), \quad \varepsilon|_{\Gamma} = \varepsilon_\Gamma(\rho, z, t). \quad (5)$$

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ АЛГОРИТМА ЗАДАЧИ

1. **Локальная линеаризация** уравнений (2), (3) на отрезке $t \in [t_j, t_{j+1}]$.

2. **Покоординатное расщепление**

Решение уравнения (1) (аналогично (2) и (3)) на отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ по схеме

$$q_1(t_j) = q(t_j),$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + C \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} q_1 + V_z \frac{\partial q_1}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial q_1}{\partial z} \right) = \frac{S}{2}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad (6)$$

$$q_2(t_j) = q_1(t_{j+1}),$$

$$\rho \frac{\partial q_2}{\partial t} + C \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \rho \frac{\alpha}{2} q_2 + \rho V_\rho \frac{\partial q_2}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho K_\rho \frac{\partial q_2}{\partial \rho} \right) = \rho \frac{S}{2}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad (7)$$

$$q(t_{j+1}) = q_2(t_{j+1}),$$

где C — некоторый коэффициент, $q_1(\rho, z, t)$, $q_2(\rho, z, t)$ — вспомогательные функции.

3. **Метод взвешенной невязки**

При фиксированных $\rho = \rho_i$: $c_k(t) = q(\rho = \rho_i, z = z_k, t)$, $q(\rho_i, z, t) \approx \sum_k c_k(t) u_k(z)$.

Решение уравнения (6):

$$\int_0^1 \left[u_l(z) \left(\sum_{k=0}^n \left\{ \dot{c}_k u_k + c_k \left[\alpha_1 u_k + V_z \frac{du_k}{dz} \right] \right\} - S_1 \right) + \sum_{k=0}^n c_k K_z \frac{du_k}{dz} \frac{du_l}{dz} \right] dz = 0, \quad l=1, 2, \dots, n-1,$$

или
$$A\dot{c} + Bc = h. \quad (8)$$

Аналогичное решение уравнения (7) при фиксированных $z = z_k$.

4. **Метод конечных разностей** (схема Кранка — Николсона)

Решение системы (8) по схеме

$$\left(A + \frac{\tau_j}{2} B^{j+1/2} \right) c^{j+1} = \left(A - \frac{\tau_j}{2} B^{j+1/2} \right) c^j + \tau_j h^{j+1/2}, \quad (9)$$

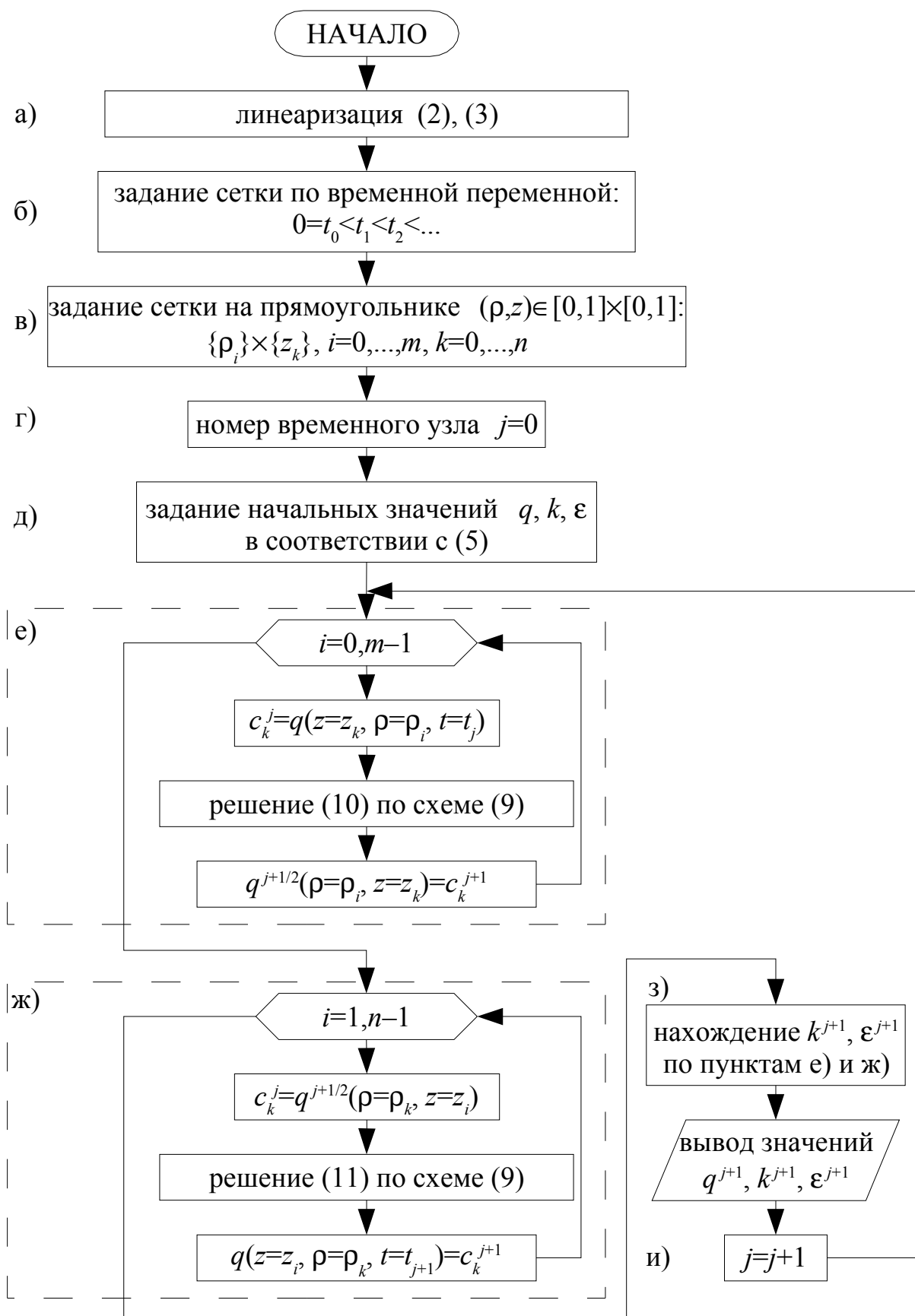
где $c^{j+1} = c(t_{j+1})$.

Для устойчивости вычислительной схемы необходимо, чтобы коэффициент C в уравнениях (6) и (7) был равен $q/2$:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\alpha}{2} q + \frac{q}{2} \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_z \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial q}{\partial z} \right) = \frac{S}{2}, \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial q}{\partial t} + \rho \frac{\alpha}{2} q + \frac{\rho q}{2} \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \rho V_\rho \frac{\partial q}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho K_\rho \frac{\partial q}{\partial \rho} \right) = \rho \frac{S}{2}. \quad (11)$$

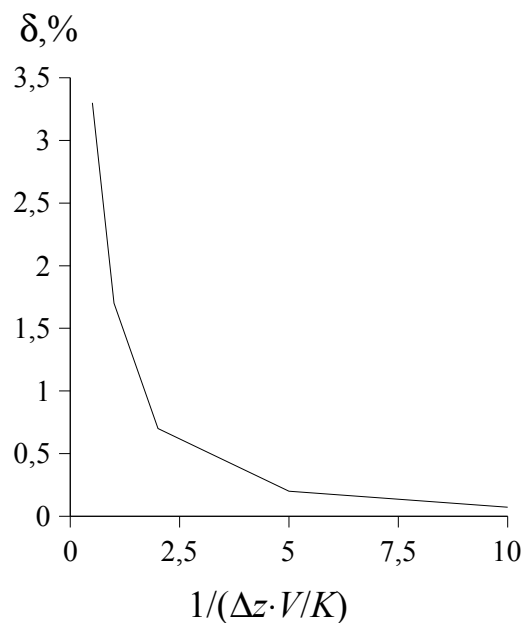
БЛОК-СХЕМА РЕШАЮЩЕГО АЛГОРИТМА



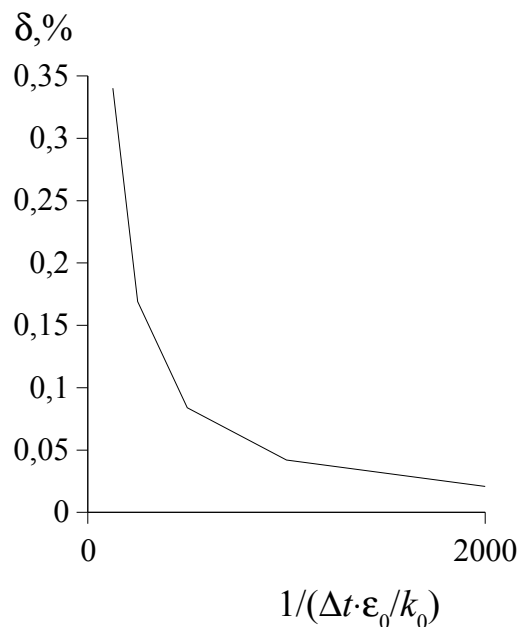
ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Необходимые условия для проведения вычислительного эксперимента:

$$(\Delta z \cdot |V_z|/K) \cdot \sigma_\varepsilon \leq 2, \quad (\Delta \rho \cdot |V_\rho|/K) \cdot \sigma_\varepsilon \leq 2, \quad K \cdot \Delta t / (\sigma_\mu \cdot \Delta z^2) \leq 0,3, \quad K \cdot \Delta t / (\sigma_\mu \cdot \Delta \rho^2) \leq 0,3.$$

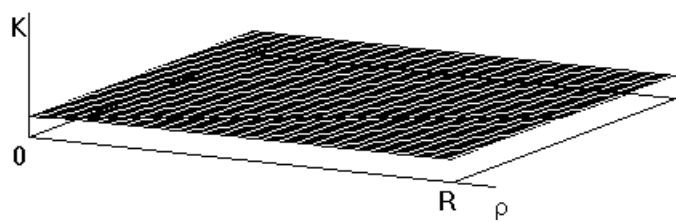


Погрешность метода конечных элементов в зависимости от параметров задачи

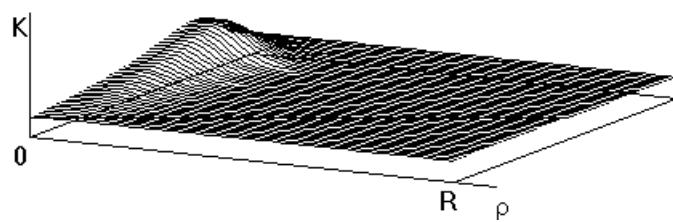


Погрешность линейризации в зависимости от параметров задачи

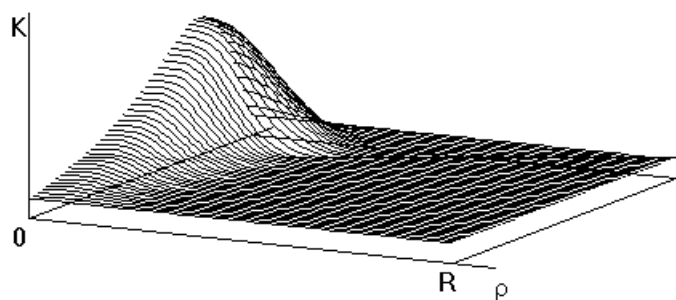
ПРОВЕДЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА



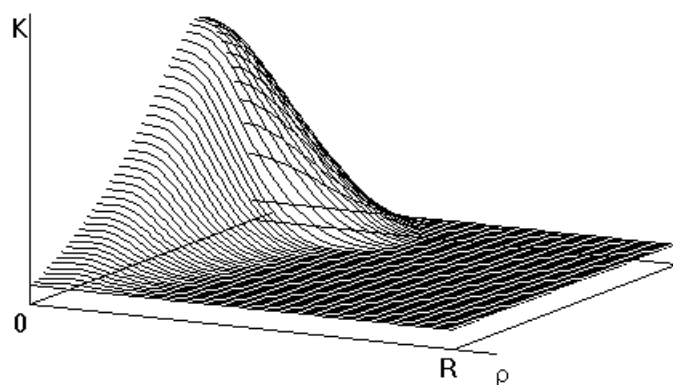
$t=0$ с



$t=180$ с

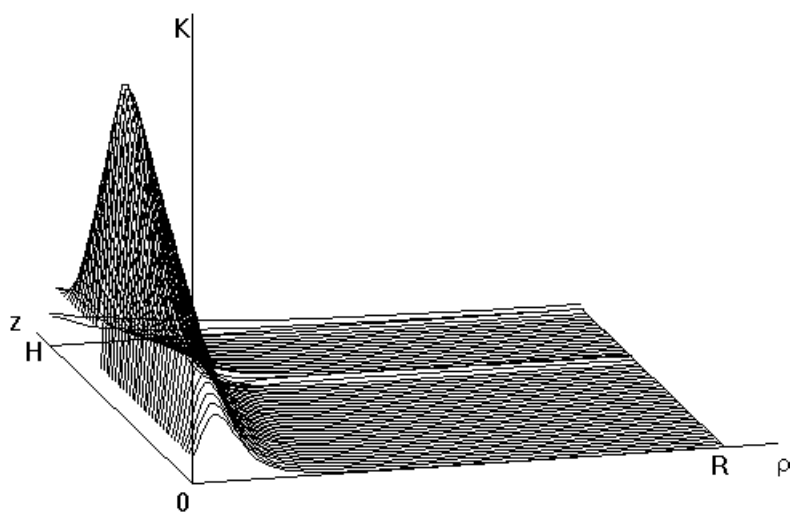


$t=480$ с



$t=900$ с

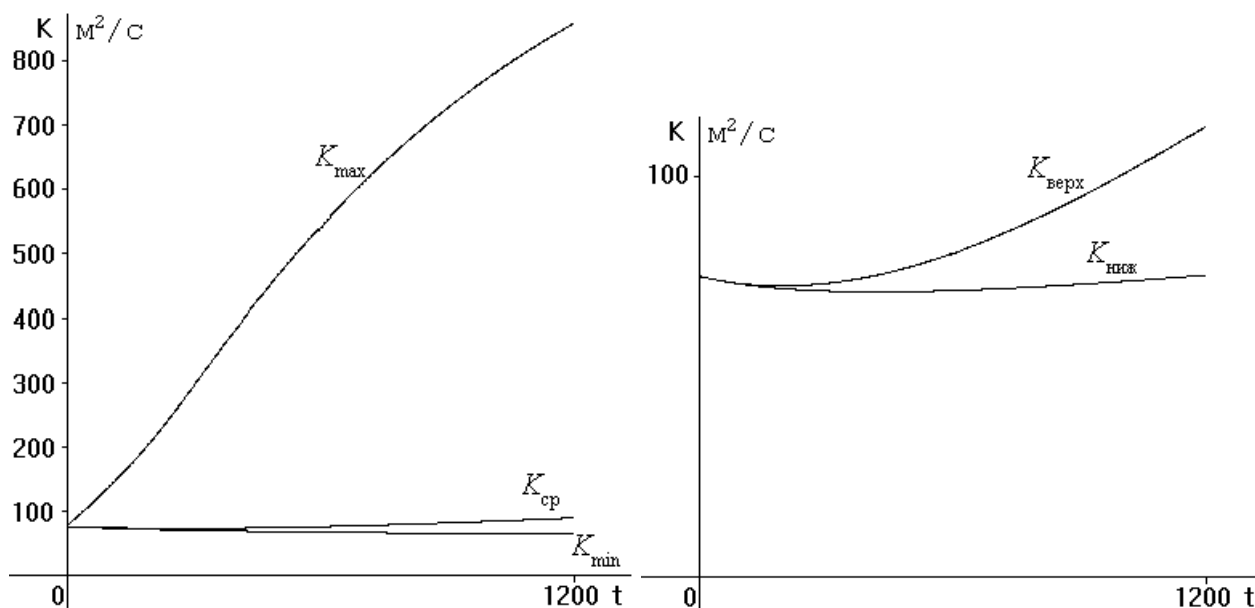
Вид поля коэффициента турбулентности K , рассчитанного по k — ϵ -модели



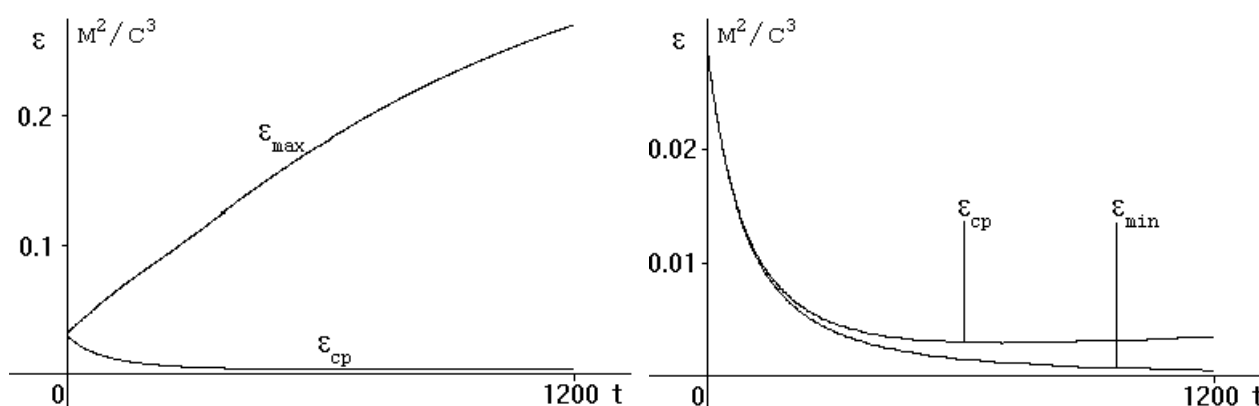
Вид поля коэффициента турбулентности K , рассчитанного по эмпирической формуле $K=cL^2(D[V])^{1/2}$

Качественное согласие модельных расчетов и эмпирических данных:

- 1) сильная турбулентность в центральной части струи;
- 2) большая турбулизованность верхней части облака по сравнению с нижней;
- 3) медленное убывание коэффициента турбулентности в распадающихся облаках;
- 4) большой разброс значений скорости диссипации турбулентной энергии в пределах облака.



Изменение максимального, минимального, среднего по области, среднего по верхней и по нижней части значений коэффициента турбулентности с течением времени

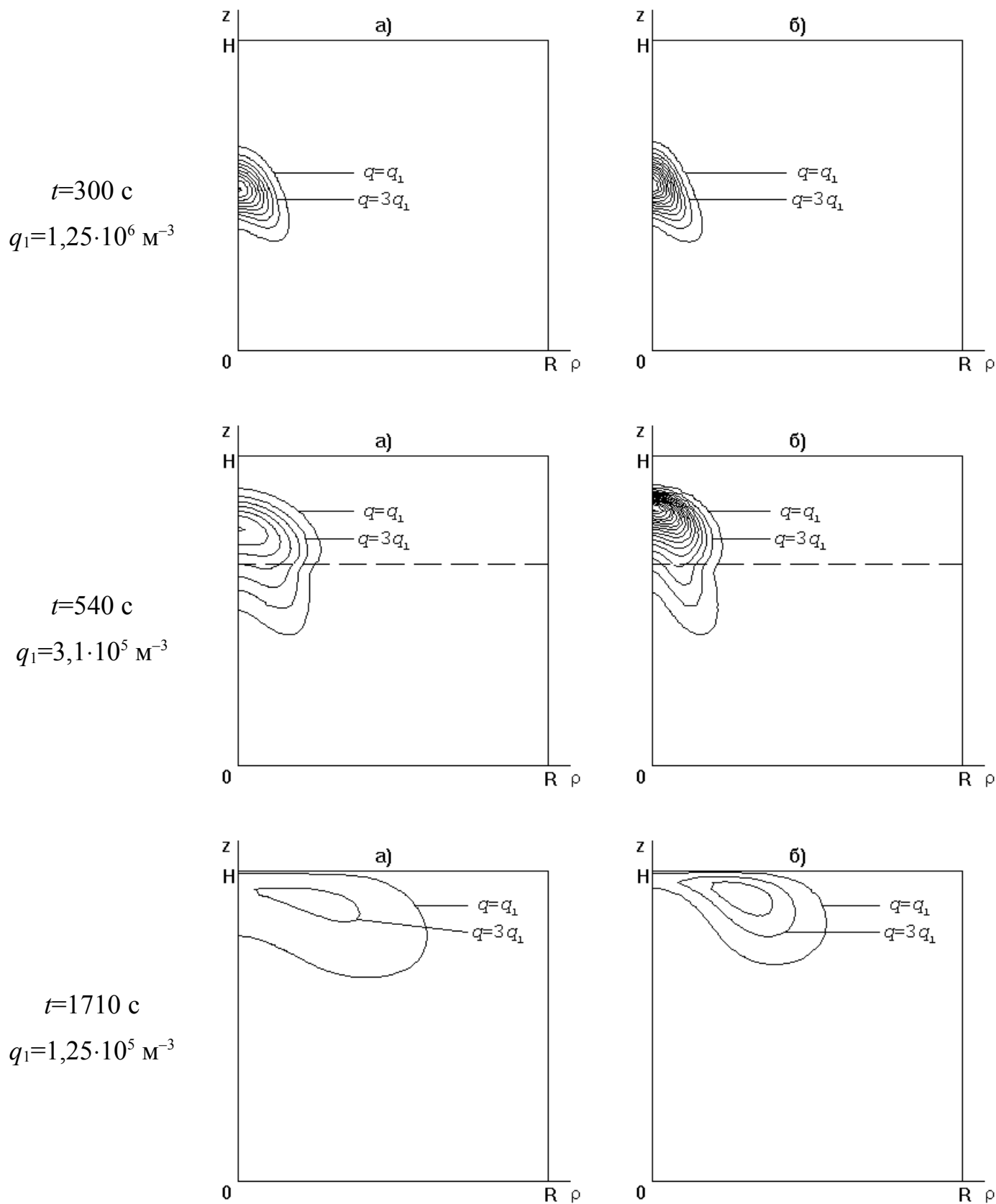


Изменение максимального, среднего и минимального по области значений скорости диссипации турбулентной энергии ϵ с течением времени

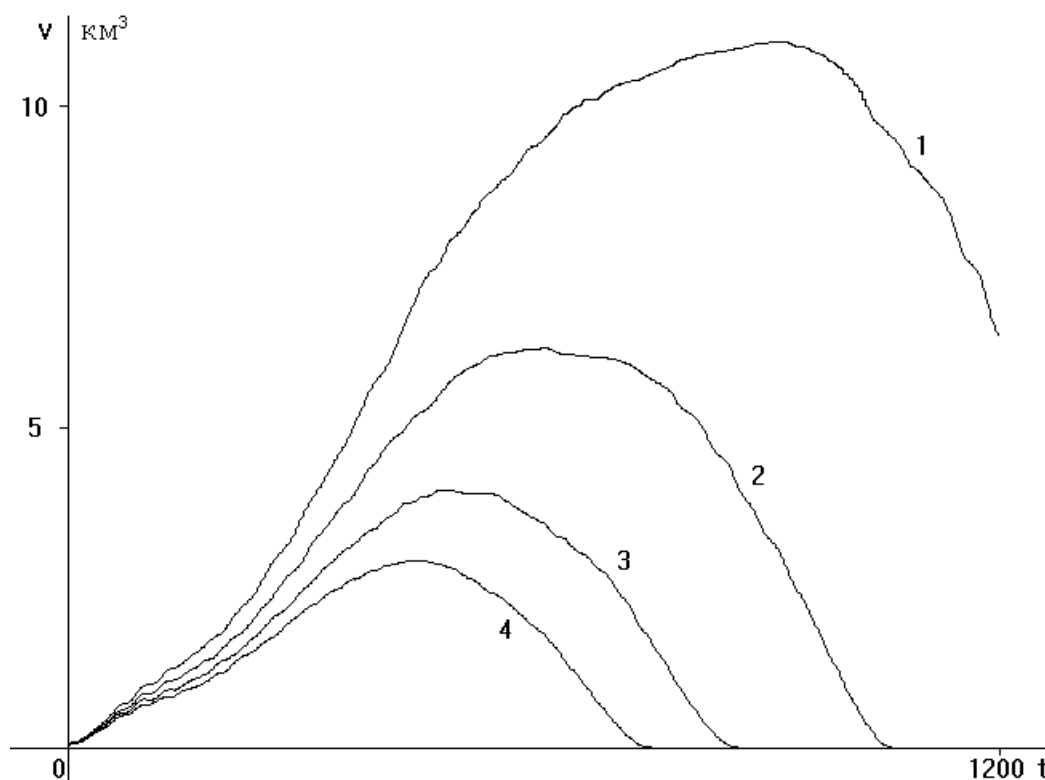
ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ АЭРОЗОЛЯ,

вычисленные а) с помощью k — ϵ -модели турбулентности;

б) в предположении постоянства коэффициента турбулентности ($K=100 \text{ м}^2/\text{с}$).



РАСЧЕТ ОБЛАСТИ ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ РЕАГЕНТА



Изменение со временем объема v области,

где концентрация q реагента превышает критическое значение q_1

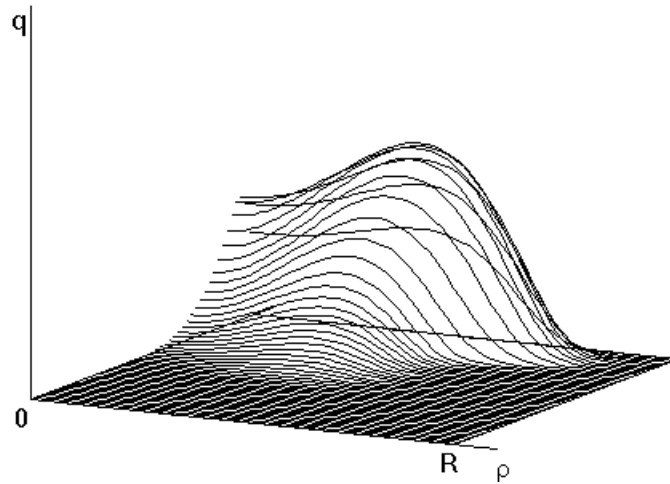
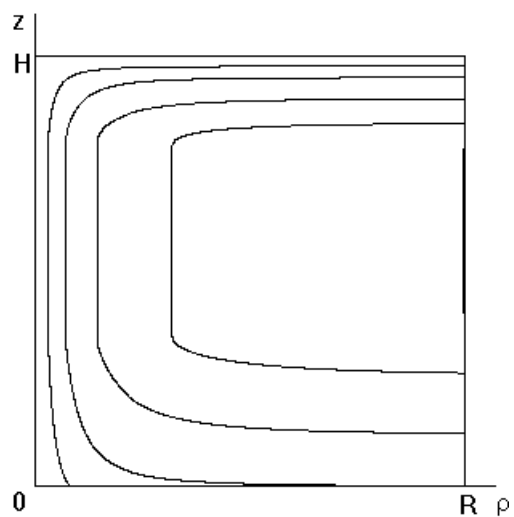
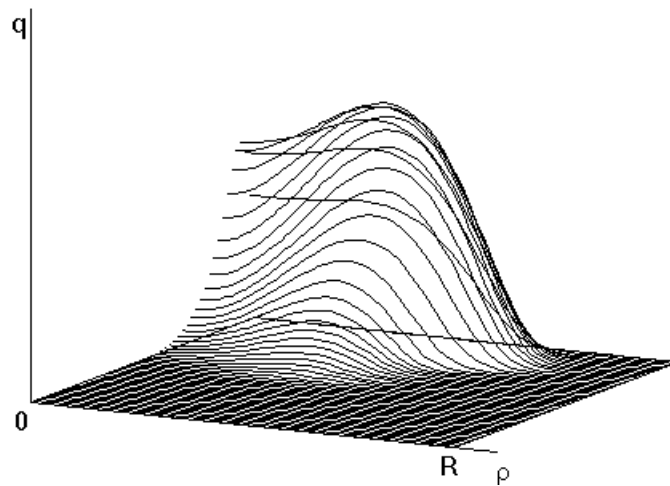
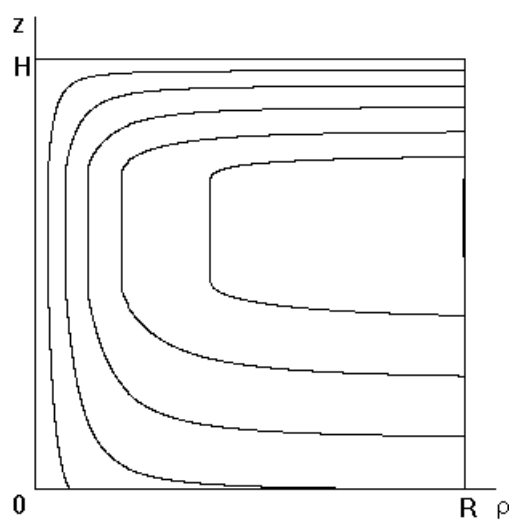
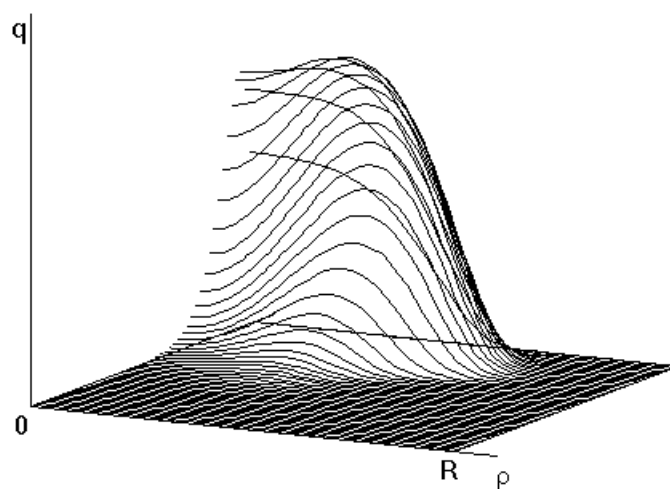
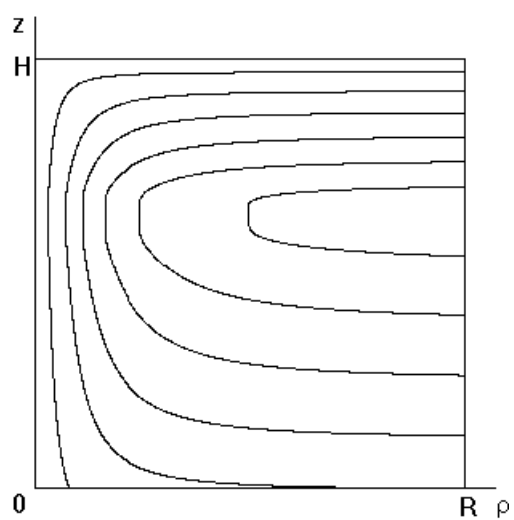
(1 — $q_1=6 \cdot 10^5 \text{ м}^{-3}$, 2 — $q_1=1 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}$, 3 — $q_1=1,5 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}$, 4 — $q_1=2 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}$)

$q_1, \text{ м}^{-3}$	$6 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$
$v_{\text{max}}, \text{ кМ}^3$	11	6,5	4	3
$t_{\text{max}}, \text{ с}$	910	610	540	430

Максимум v_{max} объема области действия реагента и время t_{max} его достижения

в зависимости от критического значения q_1 концентрации реагента

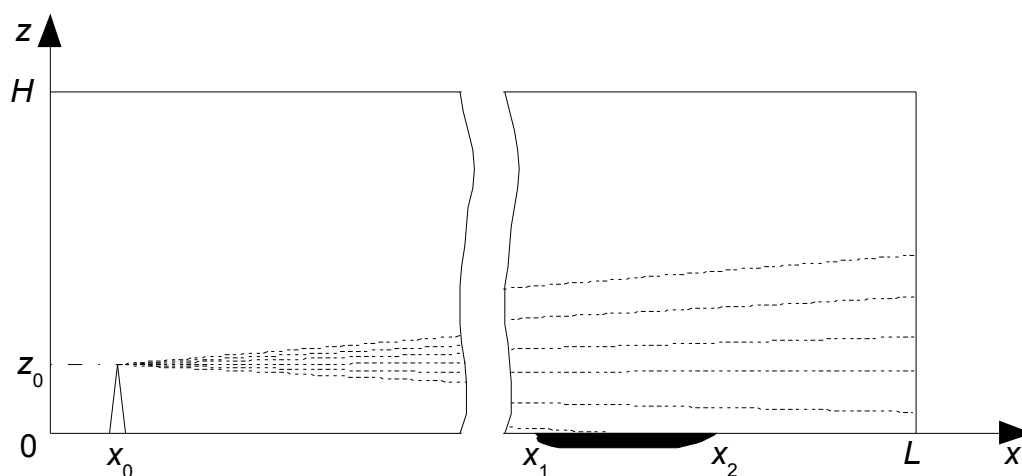
ЗАВИСИМОСТЬ ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ АЭРОЗОЛЯ ОТ ФОРМЫ СТРУИ ($t=1500$ с)



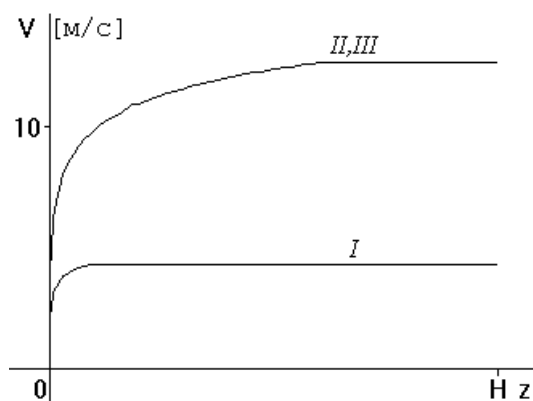
Линии тока в струе

Соответствующее поле концентрации

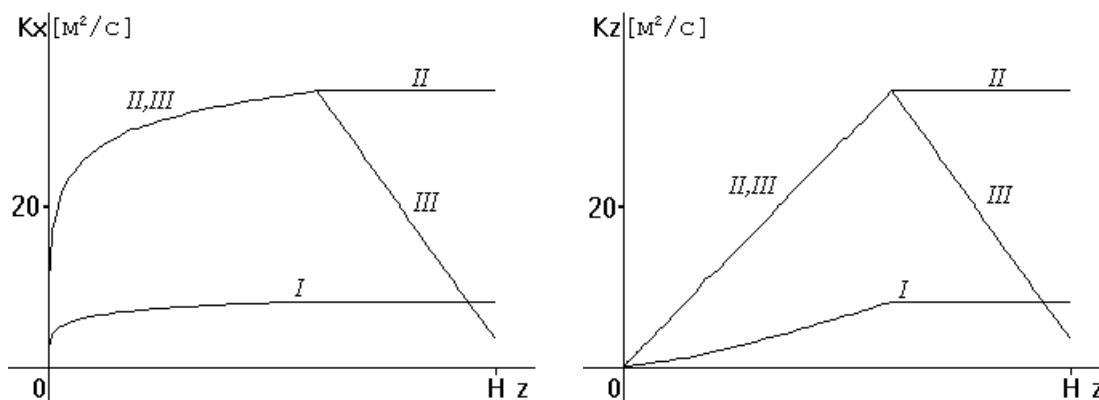
РАСЧЕТ РАССЕЯНИЯ ПРИМЕСИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ



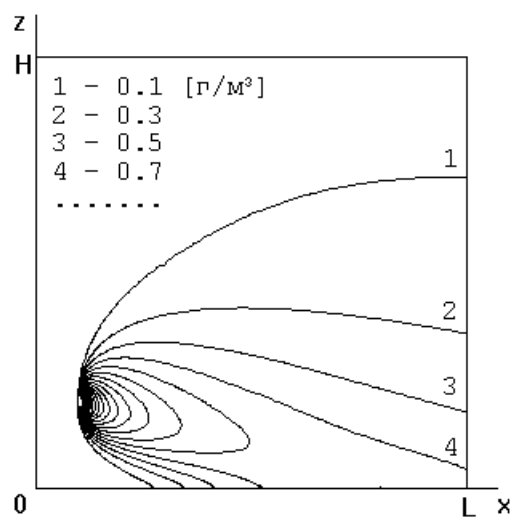
Расчетная область в задаче загрязнения атмосферы



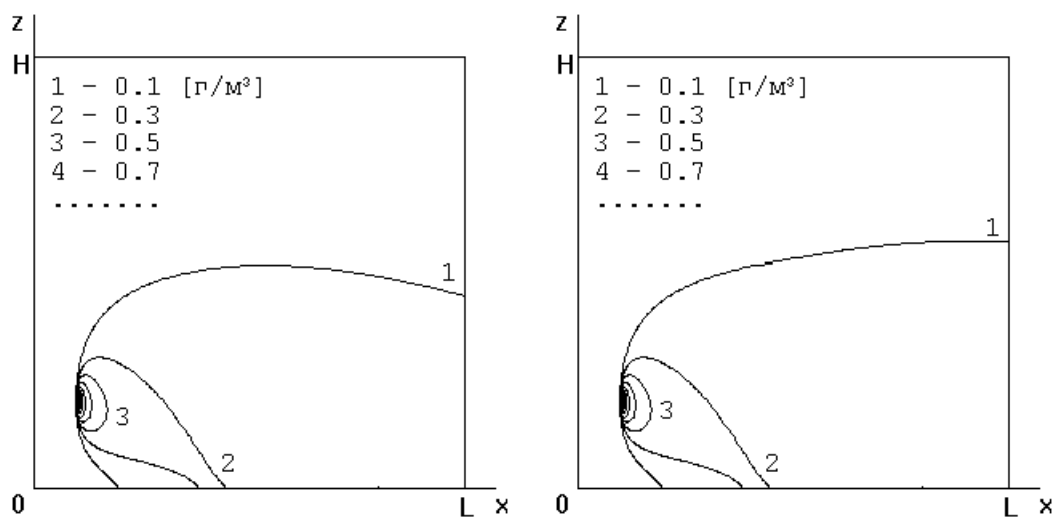
Высотный профиль скорости ветра



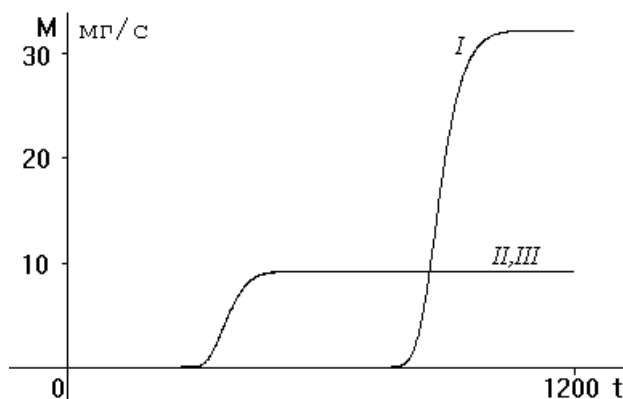
Профили коэффициентов турбулентной диффузии



Установившееся поле концентрации q (состояние атмосферы I)



Установившееся поле концентрации q (состояния атмосферы II, III)



Скорость потока вещества в водоем после начала работы источника

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Построена кинематическая модель осесимметричной струи, характерной для кучево-дождевого облака, учитывающая процессы переноса, диффузии, генерации и диссипации на развитие турбулентности. Построена модель распространения частиц реагента в облаке на основе системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

2. Сформулирована краевая задача для единой математической модели переноса массы и турбулентности, исследована ее корректность. Осуществлена редукция задачи к рекуррентным соотношениям. Линеаризация позволила решать уравнения исходной системы по отдельности. Покоординатное расщепление уменьшило размерность уравнений. Методом конечных элементов уравнение в частных производных сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Разностная схема Кранка — Николсона позволила заменить систему дифференциальных уравнений системой линейных алгебраических уравнений, для которой был применен метод прогонки.

3. Установлена сходимость построенной вычислительной схемы. Найден порядок ее аппроксимации. Исследована устойчивость схемы методом энергетических норм.

4. Для машинной реализации вычислительного алгоритма создан программный комплекс, позволяющий по заданным начальным и граничным условиям рассчитывать поля характеристик турбулентности и концентрации аэрозоля, выводить их графики на экран и сохранять результаты в текстовых (в виде таблиц) и графических файлах.

5. Исследовано поведение приближенного решения в зависимости от выбранной сетки. Результаты позволили найти условия, которым должны удовлетворять шаги сетки, чтобы решения разностной и дифференциальной задач были равнозначны.

6. Проведен вычислительный эксперимент по исследованию эволюции турбулентности и распространению аэрозоля в струе. Полученные результаты проанализированы с точки зрения их физической обоснованности. Отмечено их качественное согласие с данными метеорологических измерений.

7. Проведен расчет рассеяния примеси от прямолинейного источника в пограничном слое атмосферы. Показана применимость используемой методики для решения задач переноса.