

На правах рукописи

Корчагин Петр Владиславович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО
ПЕРЕНОСА МАССЫ И ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СТРУЯХ КОНВЕКТИВНЫХ
ОБЛАКОВ

05.13.18 — “Математическое моделирование,
численные методы, комплексы программ”

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ставрополь, 2004

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Северо-Кавказского государственного технического университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Игорь Эдуардович Наац

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Эдуард Николаевич Потетюнко
(РГУ, г. Ростов-на-Дону)

доктор физико-математических наук,
профессор Лев Григорьевич Каплан
(СГУ, г. Ставрополь)

Ведущая организация: Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Защита состоится “12” ноября 2004 г. в 13⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета К 212.245.02 в Северо-Кавказском государственном техническом университете по адресу: 355029, г. Ставрополь, пр. Кулакова, 2, зал заседаний.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СевКавГТУ по адресу:
г. Ставрополь, ул. Кулакова, 2.

Отзывы на автореферат просьба присылать по адресу: 355029, г. Ставрополь,
ул. Кулакова, 2, СевКавГТУ, диссертационный совет К 212.245.02

Автореферат разослан “9” октября 2004 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук

Мезенцева О.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Градобития ежегодно приносят огромные убытки во многих странах мира. Зачатки научного подхода к борьбе с градом появились в конце XIX века. Основным средством борьбы тогда был обстрел облаков из артиллерийских орудий. С 40-х годов XX века и по настоящее время во всем мире ведутся научно-исследовательские и опытно-производственные работы по искусственному регулированию осадков из облаков и облачных систем. В России действует программа по разработке методов метеорологической защиты городов и важнейших объектов. Она включает расчет количества расходуемого кристаллизующего реагента и оценку эффективности воздействия. С этой целью применяются методы математического моделирования. В этом направлении достигнуты определенные успехи. Однако чрезвычайная сложность стоящей проблемы требует дальнейших исследований. Так, в настоящее время рассматривают одно-, двумерные модели, тогда как реальная задача имеет трехмерную геометрию. Но увеличение размерности ведет к существенному повышению затрат машинного времени и вычислительных ресурсов, даже если используются те же методы, что и в двумерных случаях, что может сделать невозможным выполнение расчетов на существующих ЭВМ. Многие физические процессы в облаке не имеют адекватного математического описания. Часто важные явления не учитываются в моделях, либо учитываются весьма грубо. Одно из таких явлений — турбулентность. Эмпирические формулы для ее учета имеют невысокую точность. Поэтому представляемое в настоящей работе исследование, направленное на совершенствование описания турбулентности и последующее использование его результатов, является актуальным.

Цель работы

Целью работы является разработка методов расчета полей турбулентности и концентрации диффундирующего вещества (частиц аэрозоля) во внутриоблачной струе применительно к проблеме искусственного регулирования осадков.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

- построить кинематическую модель внутриоблачной струи, базирующуюся на результатах метеорологических исследований и воспроизводящую наблюдаемые трехмерные явления;
- при описании турбулентности учесть ее генерацию за счет неустойчивости течения при больших числах Рейнольдса, ее вязкую диссипацию, конвективный и диффузионный перенос;
- построить модель распространения дисперсных частиц в струе применительно к задаче искусственного воздействия на облака;
- построить алгоритм численной реализации математической модели турбулентности в облаке и диффузии аэрозольных частиц;
- провести на теоретическом уровне исследование сходимости вычислительной схемы;
- создать программный комплекс для расчета полей турбулентности и концентрации вещества, имеющий удобный пользовательский интерфейс;
- провести численное исследование погрешности и устойчивости вычислительной схемы;
- провести численный эксперимент по расчету полей характеристик турбулентности и концентрации аэрозоля, дать анализ полученных результатов; сопоставить их с эмпирическими данными и сформулировать практические рекомендации по использованию полученных результатов в проблеме искусственного воздействия на облака.

Научная новизна

Научная новизна работы состоит в том, что при моделировании распространения аэрозоля во внутриоблачной струе учтены такие явления, как генерация турбулентности за счет неустойчивости течения при больших числах Рейнольдса, ее вязкая диссипация, конвективно-диффузионный перенос. В работе отдано предпочтение сложной модели турбулентности, основанной на системе двух дифференциальных уравнений в частных производных. Преимущество этого подхода в том, что он позволяет вычислять с приемлемой точностью важный параметр — масштаб турбулентности.

Практическая значимость

Практическое значение работы определяется возможностью применения ее результатов при разработке более общих моделей для оценки последствий искусственного воздействия на облака и для решения задачи оптимального выбора параметров воздействия. Эти результаты, представленные графически, демонстрируют развитие турбулентности и распространение вещества в облаке, что можно использовать в качестве наглядных пособий при изучении таких дисциплин, как “Прикладная экология”, “Гидродинамика”.

Положения, выносимые на защиту:

1. Модель внутриоблачных турбулентных потоков, учитывающая их струйный характер, осевую симметрию, генерацию турбулентности за счет неустойчивости течения, ее конвективно-диффузионный перенос и вязкую диссипацию.
2. Модель переноса вещества струйными потоками, учитывающая их осевую симметрию и процессы конвекции, диффузии, распада и другие способы выведения вещества из среды либо генерацию частиц источником.
3. Вычислительный алгоритм решения модельной задачи, построенный с использованием линеаризации нелинейных уравнений, методов расщепления многомерных задач, взвешенной невязки в рамках конечноэлементного

подхода и конечных разностей, и доказательство сходимости вычислительного процесса с обоснованием его порядка аппроксимации и устойчивости методом энергетических норм.

4. Программный комплекс (свидетельство об официальной регистрации № 2004612018 от 03.09.2004 г.), реализующий вычислительный алгоритм.

5. Результаты исследования точности приближенных вычислений, установление границ параметров, выбираемых в численных методах для устранения нефизического поведения приближенных решений (например, возникновения отрицательной концентрации вещества).

6. Результаты вычислительного эксперимента, позволившие выявить особенности развития турбулентности и распространения аэрозоля во внутриоблачной струе. Сопоставление результатов моделирования с данными метеорологических измерений.

Публикации и апробация результатов исследования

По теме диссертации автором опубликовано 12 работ, из них 3 статьи. Результаты исследований были доложены на:

- Международной школе-семинаре по геометрии и анализу (п. Абрау-Дюрсо, 2002 г.);
- Всероссийской конференции “Математическое моделирование в научных исследованиях” (г. Ставрополь, 2000 г.);
- региональной конференции “Вузовская наука — Северо-Кавказскому региону” (г. Ставрополь, 1999 г.);
- межрегиональной конференции “Студенческая наука — экономике России” (г. Ставрополь, 2002 г.).

Публикации также сделаны в сборниках трудов:

- Международной конференции “Компьютерное моделирование 2003” (г. Санкт-Петербург, 2003 г.);
- региональных конференций “Проблемы компьютерных технологий и математического моделирования в естественных, технических и

гуманитарных науках” (г. Георгиевск, 2001—2004 гг.).

Результаты диссертационной работы использованы при выполнении НИР по гранту Министерства образования (код Е 02-12.1-175) “Моделирование совместного загрязнения грунта и атмосферы”. На основе диссертационных исследований разработаны методические указания для изучения темы “Моделирование турбулентности” по дисциплине “Математическое моделирование в задачах механики сплошных сред”, которые используются в учебном процессе в СевКавГТУ (акт о внедрении от 22.09.2004 г.).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы, содержащего 109 наименований, и приложений. Работа изложена на 135 листах машинописного текста, содержит 54 рисунка и 13 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1. Физические основы математического моделирования массопереноса и турбулентности во внутриоблачных конвективных потоках. Выбор и обоснование модели

Для понимания принципов искусственного воздействия на градовые облака в главе приводятся современные представления о механизме образования града. Основной метод, применяемый при воздействии — введение в облако частиц кристаллизующего реагента. Для оценки последствий воздействия прибегают к математическому моделированию происходящих процессов. В работе строится математическая модель, описывающая два явления — турбулентность в облаке и перенос частиц реагента (аэрозоля) в турбулентной среде.

В качестве основы моделирования турбулентности используют идеи А.Н. Колмогорова, рассматривая турбулентное течение как систему вихрей.

Математическое описание турбулентности основано на выделении осредненных и пульсационных составляющих параметров течения среды (скорости, давления). Пульсационные составляющие величин и отвечают турбулентности. Для определения их статистических характеристик считают, что течение среды описывается уравнением Навье — Стокса. В главе рассмотрен вопрос об адекватности такого описания явлений в турбулентных потоках. Во всех уравнениях плотность среды считается постоянной.

Для описания рассеяния аэрозольных частиц в облаке используется уравнение турбулентной диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) C = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} C - \langle \mathbf{v}' c' \rangle), \quad (1.1)$$

где C , c' — осредненная и пульсационная составляющие концентрации аэрозоля, \mathbf{V} , \mathbf{v}' — осредненная и пульсационная составляющие скорости потоков, D — коэффициент молекулярной диффузии. Угловые скобки обозначают осреднение по времени. Источники и стоки не учитываются. Корреляционные моменты $\langle v'_i c' \rangle$ заменяют модельным соотношением

$$-\langle v'_i c' \rangle = \Gamma_t \frac{\partial C}{\partial x_i}, \quad (1.2)$$

вводящим понятие турбулентной диффузии. Параметр Γ_t называют коэффициентом турбулентной диффузии. Обычно его связывают с другим — коэффициентом турбулентной вязкости K (называемым просто коэффициентом турбулентности), задаваемым в уравнениях для скоростей осредненного течения по формуле:

$$-\langle v'_i v'_j \rangle = K \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}.$$

Здесь $k = \langle v'_i v'_i \rangle / 2$ — плотность кинетической энергии турбулентности (по индексу i проводится суммирование от 1 до 3). Формула связи величин Γ_t и K имеет вид:

$$\Gamma_t = K / \sigma_t. \quad (1.3)$$

Здесь коэффициент пропорциональности σ_t — число Прандтля — Шмидта. Как было найдено из экспериментов разного рода, оно меняется мало. Для круглых

течений его принимают равным 0,7. В главе обсуждается применимость концепции турбулентной вязкости и турбулентной диффузии.

Исходное представление для нахождения коэффициента K в том, что он пропорционален масштабу скорости пульсаций \hat{v} и масштабу турбулентности L :

$$K \propto \hat{v}L. \quad (1.4)$$

Простейшей является модель Прандтля, который ввел понятие “турбулентного моля” — жидкой частицы, проходящей до своего “растворения”, т. е. размывания ее границы с окружающей средой, “путь смешения” l_m . Эта гипотеза приводит к простым формулам нахождения коэффициента K через l_m и градиенты средней скорости, которые используют для расчета течений в пограничных слоях. Однако в более сложных случаях проявляются недостатки этой модели. Так, она не учитывает ни предшествующего состояния среды, ни переноса турбулентности из соседних областей. Также возникают трудности с заданием пространственного распределения пути смешения.

В связи с этим были разработаны модели с учетом переноса турбулентности. Масштаб пульсаций скорости определяется не по градиентам средней скорости, а путем решения уравнений переноса для него. Этим масштабом выбирается величина $k^{1/2}$. Уравнение для k выводится из уравнения Навье — Стокса. Оно имеет вид:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + V_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + K \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - c_D \frac{k^{3/2}}{L}, \quad (1.5)$$

$$K = c'_\mu k^{1/2} L, \quad (1.6)$$

c'_μ , c_D , σ_k — эмпирические константы. Для слоев со сдвигом масштаб турбулентности L задают эмпирическими соотношениями. В более сложных случаях нередко используют модельную связь L со скоростью диссипации турбулентной энергии ϵ :

$$L = c_D k^{3/2} / \epsilon.$$

На величину ϵ , как и на k , влияет предшествующее состояние среды и турбулентность в соседних областях, поэтому для него также записывают

уравнение переноса. Это уравнение и уравнение для k и составляют k — ε -модель турбулентности:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + V_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + K \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \varepsilon, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + V_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{K}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + c_{1\varepsilon} c_\mu k \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (1.8)$$

$$K = c_\mu k^2 / \varepsilon, \quad (1.9)$$

$$c_\mu = 0,09, \quad c_{1\varepsilon} = 1,44, \quad c_{2\varepsilon} = 1,92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1,3.$$

Модель с успехом применялась для описания многих типов течений. В главе приводится обзор и других моделей, учитывающих перенос турбулентности.

Для модели переноса аэрозольных частиц (1.1)—(1.2), использующей соотношения и уравнения (1.3), (1.7)—(1.9) необходимы следующие данные: поля концентрации аэрозоля C , турбулентной энергии k , скорости диссипации ε в начальный момент и скорость потоков V . Начальное распределение C определяется параметрами искусственного воздействия (местом внесения аэрозоля и его количеством). Предполагается, что остальные данные берутся из эксперимента. В главе указывается единственно пригодный метод наземного зондирования облаков — радиолокаторами СВЧ-диапазона — и объясняется неадекватность других методов. С помощью радиолокационного зондирования можно получить информацию как о скорости течения, так и о характеристиках турбулентности.

Для конкретизации модели в главе приводятся общие сведения о воздушных потоках внутри кучево-дождевых облаков.

Глава 2. Построение и математическое обоснование вычислительной схемы для задачи переноса

В этой и последующих главах концентрация аэрозоля обозначается через q . В модель распространения аэрозоля внесены дополнения: учтено, что он может распадаться (или выводиться из среды) со скоростью αq ($\alpha \geq 0$) и вноситься источником мощности S . В результате вместо уравнений (1.1), (1.2) имеем:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha q + V \operatorname{grad} q - \operatorname{div} \left(\frac{K}{\sigma_t} \operatorname{grad} q \right) = S. \quad (2.1)$$

Считается, что заданные функции дифференцируемы нужное число раз.

Предполагается, что воздушный поток — вертикальная осесимметричная незакрученная струя. Расчеты производятся в цилиндрической области Π радиусом R , высотой H и осью, совпадающей с осью струи. Γ — граница области. Задаются начальные и граничные условия для функций q , k , ε :

$$q|_{t=0}=q_0(\mathbf{r}), \quad q|_{\Gamma}=q_{\Gamma}(\mathbf{r}, t), \quad k|_{t=0}=k_0(\mathbf{r}), \quad k|_{\Gamma}=k_{\Gamma}(\mathbf{r}, t), \quad \varepsilon|_{t=0}=\varepsilon_0(\mathbf{r}), \quad \varepsilon|_{\Gamma}=\varepsilon_{\Gamma}(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

Модель дополняется уравнением неразрывности:

$$\operatorname{div} V=0. \quad (2.3)$$

Вводится цилиндрическая система координат $Or\varphi z$, так что расчетная область Π описывается неравенствами: $\rho \leq R$, $0 \leq z \leq H$. Функции q_0 , k_0 , ε_0 , q_{Γ} , k_{Γ} , ε_{Γ} , α , S считаются независимыми от переменной φ (рассматривается осесимметричная задача), откуда следует, что искомые функции q , k , ε также не зависят от φ .

Для исследования корректности поставленной задачи оцениваются максимальные скорости роста и убывания величин k и ε . Оказывается, что они ограничены сверху функциями вида $(A+B \cdot t)^C$, где $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$, а снизу — функциями того же вида при $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$. Следовательно, в течение конечного промежутка времени k , ε и коэффициент турбулентности K остаются ограниченными:

$$0 < k_{\min} \leq k \leq k_{\max}, \quad 0 < \varepsilon_{\min} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}, \quad 0 < K_{\min} \leq K \leq K_{\max}.$$

Таким образом, уравнения для q , k , ε имеют форму

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u + V \cdot \operatorname{grad} u - \operatorname{div}(p \cdot \operatorname{grad} u) = F, \quad (2.4)$$

$$\alpha \geq 0, \quad \operatorname{div} V=0, \quad 0 < p_{\min} \leq p \leq p_{\max}.$$

Известно, что решение такого уравнения существует. Более сложные вопросы — единственность и непрерывная зависимость от начальных, граничных условий и неоднородности уравнения — доказаны с использованием принципа максимума только для линейного уравнения (2.1).

Для нелинейных (1.7) и (1.8) такие исследования в главе не проводились.

Модель переноса турбулентности и массы аэрозоля основана на системе квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с двумя пространственными переменными.

Для решения системы (1.7), (1.8), (2.1) сначала производится ее линеаризация. Временная ось $t \geq 0$ разбивается на интервалы узлами $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$. Для каждого интервала $[t_j, t_{j+1}]$ множитель K в правых частях уравнений заменяется на $K(t=t_j)$, а в двух последних слагаемых уравнений (1.7), (1.8) величины k и ε на $k(t=t_j)$ и $\varepsilon(t=t_j)$ соответственно. Применение этого метода позволяет решать уравнения системы по отдельности.

Для удобства расчетов пространственные координаты нормируются.

Линеаризованные уравнения имеют сходную форму, поэтому разбирается решение одного из них — уравнения для q . К нему применяется метод расщепления. На временном отрезке $[t_j, t_{j+1}]$ вводятся вспомогательные функции q_1 и q_2 для того, чтобы искать значения $q(t_{j+1})$ по известным $q(t_j)$ по правилу:

$$q_1(t_j) = q(t_j),$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\alpha}{2} q_1 + V_z \frac{\partial q_1}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial q_1}{\partial z} \right) = \frac{S}{2}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad (2.5)$$

$$q_2(t_j) = q_1(t_{j+1}),$$

$$\rho \frac{\partial q_2}{\partial t} + \rho \frac{\alpha}{2} q_2 + \rho V_p \frac{\partial q_2}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho K_p \frac{\partial q_2}{\partial \rho} \right) = \rho \frac{S}{2}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad (2.6)$$

$$q(t_{j+1}) = q_2(t_{j+1}).$$

Схема расщепления сводит исходную задачу к задачам меньшей размерности.

Вводится сетка $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = 1$, $0 = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_m = 1$. Уравнение (2.5) решается при фиксированной $\rho = \rho_i$ ($i = 0 \div m-1$), а (2.6) — при $z = z_k$ ($k = 1 \div n-1$). Значения же функции q при $\rho = \rho_m$, $z = z_0$, $z = z_n$ известны из граничных условий.

Для решения уравнения (2.5) при $\rho = \rho_i$ используется метод взвешенной невязки (метод Галеркина) в рамках конечноэлементного подхода. Применяемые при этом базисные и весовые функции кусочно-линейны. Таким

образом уравнение в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$A\dot{\mathbf{c}} + B\mathbf{c} = \mathbf{h}, \quad (2.7)$$

где $c_k(t) = q(\rho = \rho_i, z = z_k, t)$; матрицы A и B трехдиагональны. В главе показано, что матрица A невырождена, так что решение системы (2.7) существует и единственно. С помощью схемы Кранка — Николсона система дифференциальных уравнений (2.7) редуцируется к системе линейных алгебраических уравнений

$$\left(A + \frac{\tau_j}{2} B^{j+1/2} \right) \mathbf{c}^{j+1} = \left(A - \frac{\tau_j}{2} B^{j+1/2} \right) \mathbf{c}^j + \tau_j \mathbf{h}^{j+1/2}, \quad (2.8)$$

где $\tau_j = t_{j+1} - t_j$, $\mathbf{c}^j = \mathbf{c}(t = t_j)$, $B^{j+1/2} = B(t = (t_j + t_{j+1})/2)$, $\mathbf{h}^{j+1/2} = \mathbf{h}(t = (t_j + t_{j+1})/2)$. Система (2.8) трехдиагональна, что позволяет использовать для ее решения метод прогонки. Уравнение (2.6) сводится таким же образом к системе линейных алгебраических уравнений вида (2.8).

Для проверки сходимости построенной вычислительной схемы ищется ее порядок аппроксимации по временной и пространственным переменным и исследуется устойчивость.

Для нахождения порядка аппроксимации относительно шага по времени используются известные из литературы результаты. Аппроксимация по пространственным переменным найдена путем разложения функций из уравнений (2.5), (2.6) в ряд Тейлора и сравнения множителей при одинаковых степенях Δz , $\Delta \rho$ в этих уравнениях и в уравнениях системы (2.7). Оказалось, что вычислительная схема аппроксимирует исходную систему уравнений (1.7), (1.8), (2.1) с погрешностью $O(\Delta \rho^2 + \Delta z^2 + \Delta t)$.

В главе проведено сравнение методов взвешенной невязки и наименьших квадратов применительно к решаемым уравнениям. Оказалось, что решения по обоим методам совпадают, если используемые базисные и весовые функции дважды дифференцируемы.

Особое внимание уделено исследованию устойчивости разностной схемы. Последняя состоит из m систем (2.8), записанных для уравнения (2.5), — в

итоге их можно переписать в виде

$$A_{11}\mathbf{q}^{j+1/2}+A_{12}\mathbf{q}^j=\mathbf{h}_1^j, \quad (2.9a)$$

и из $(n-1)$ системы (2.8), записанной для (2.6):

$$A_{21}\mathbf{q}^{j+1}+A_{22}\mathbf{q}^{j+1/2}=\mathbf{h}_2^j. \quad (2.9б)$$

Здесь через \mathbf{q}^j обозначен вектор значений функции q в узлах (ρ_i, z_k) в момент $t=t_j$, а через $\mathbf{q}^{j+1/2}$ — вектор значений функции $q_1(t_{j+1})=q_2(t_j)$. Исключая из (2.9a) и (2.9б) член $\mathbf{q}^{j+1/2}$, получаем:

$$A_1\mathbf{q}^{j+1}+A_2\mathbf{q}^j=\mathbf{h}^j. \quad (2.10)$$

В главе показано, что схему (2.10) следует проверять на равномерную устойчивость, т. е. выполнение неравенства

$$\|\mathbf{q}^j\|_{(j)} \leq M_1 \|\mathbf{q}^k\|_{(k)}, \quad k=0, 1, \dots, j-1, \quad (2.11)$$

при нулевых векторах \mathbf{h}^j . С использованием леммы неравенство (2.11) конкретизируется:

$$\|\mathbf{q}^{j+1}\|_D \leq \|\mathbf{q}^j\|_D, \quad (2.12)$$

где D — диагональная матрица, элементы которой равны $\int_0^1 \rho u_i^{(p)}(\rho) d\rho \cdot \int_0^1 u_k^{(z)}(z) dz$ ($u_i^{(p)}(\rho)$ и $u_k^{(z)}(z)$ — система базисных функций, построенных на сетке $\{\rho_i\}$ и $\{z_k\}$ соответственно). $\|\bullet\|_D$ — энергетическая норма: $\|\mathbf{x}\|_D = (\mathbf{x}^T D \mathbf{x})^{1/2}$. Критерии выполнения неравенства (2.12) найти сложно, если вообще возможно, поэтому оно было заменено (в главе обоснована такая замена) достаточными неравенствами $\|\mathbf{q}^{j+1/2}\|_D \leq \|\mathbf{q}^j\|_D$, $\|\mathbf{q}^{j+1}\|_D \leq \|\mathbf{q}^{j+1/2}\|_D$, а эти, в свою очередь, более простыми.

Критерии выполнения последних выведены из доказанных в литературе по разностным методам. Они состоят в операторных неравенствах для матриц D и A и B из системы (2.8). С помощью вычислительного эксперимента обнаружены случаи невыполнения этих критериев (т. е. схема неустойчива). Выход из ситуации найден в изменении способа расщепления линеаризованных уравнений (1.7), (1.8), (2.1). Привлечение уравнения неразрывности (2.3) позволило вместо (2.5) и (2.6) записать:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\alpha}{2} q_1 + \frac{q_1}{2} \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_z \frac{\partial q_1}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial q_1}{\partial z} \right) = \frac{S}{2}, \quad (2.13)$$

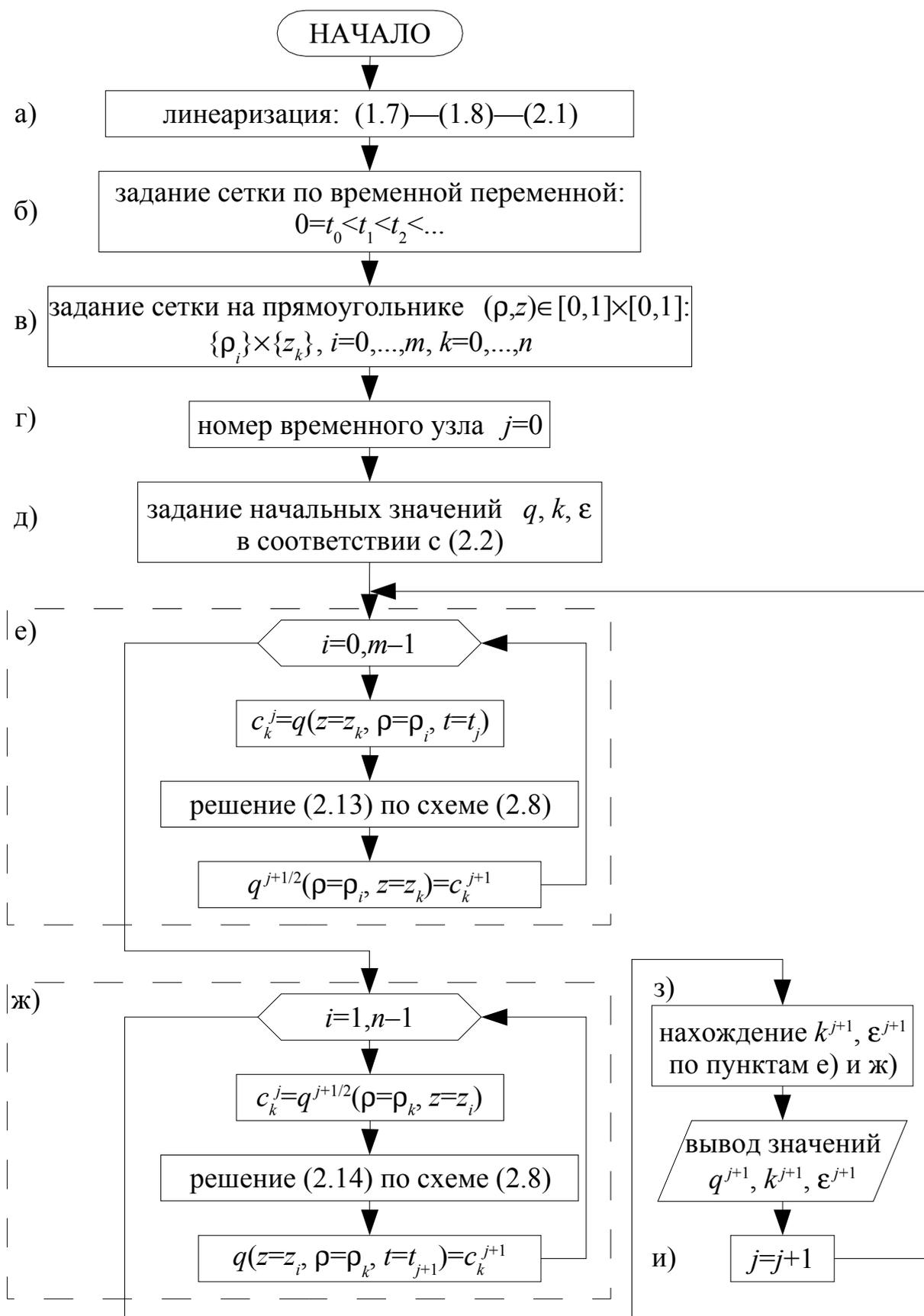


Рисунок 1 — Блок-схема решающего алгоритма

$$\rho \frac{\partial q_2}{\partial t} + \rho \frac{\alpha}{2} q_2 + \frac{\rho q_2}{2} \frac{\partial V_p}{\partial \rho} + \rho V_p \frac{\partial q_2}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho K_p \frac{\partial q_2}{\partial \rho} \right) = \rho \frac{S}{2}. \quad (2.14)$$

Вычислительная схема с таким способом расщепления устойчива при достаточно малых шагах $\Delta\rho$, Δz , а решение разностной задачи сходится при измельчении шагов сетки к решению дифференциальной.

Глава 3. Разработка программного комплекса и анализ погрешности расчетов

При машинной реализации численных методов, описанных в главе 2, к разрабатываемому программному комплексу были предъявлены следующие требования:

- переносимость;
- низкие требования к системным ресурсам;
- высокая скорость работы;
- возможность ввода данных в программу;
- возможность графического вывода результатов;
- удобство в управлении программой.

Эти требования были выполнены следующим образом. Программа написана на языке C++; использован компилятор MinGW. Проведена оптимизация численных методов. Для ввода данных предусмотрено два способа: считывание их из текстового файла и задание непосредственно в исходном коде. В ходе работы программы возможна корректировка основных параметров путем вызова диалоговых окон. Вывод результатов расчетов доступен в двух вариантах: в виде таблиц и в виде графиков (трехмерных либо линий уровня). Сохранение графиков в постоянной памяти возможно в форматах WMF и BMP. Управление программой происходит с помощью “горячих” клавиш либо меню пользователя.

В главе уделено внимание оценке погрешности вычислительной схемы, т. к. порядок аппроксимации, определенный теоретически, показывает лишь, как уменьшается погрешность при измельчении сетки. Система уравнений (1.7), (1.8), (2.1) очень сложна, и нахождение общей формулы для погрешности

весьма трудно. Предлагается практический способ, применимый в каждом конкретном случае, использующий численные решения на разных сетках.

В главе проведен анализ погрешности вычислительной схемы в частных случаях. Используемые численные методы применяются к типичным уравнениям или системам, которые несколько проще исходной дифференциальной задачи, но тем не менее учитывают все ее особенности. Сравнение приближенного решения с известным аналитическим позволяет обнаружить поведение первого в зависимости от шагов сетки и дает представление о числовом значении погрешности схемы.

При недостаточно подробной сетке в численном решении появляются пульсирующие или не пульсирующие “выбросы”, как на рис. 2.

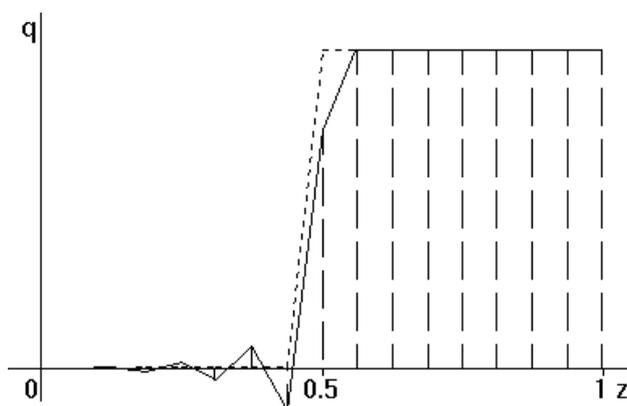


Рисунок 2 — Появление “выбросов” на графике приближенного решения при недостаточно подробной сетке

Чтобы их избежать, необходимо выполнения неравенств:

$$(\Delta z \cdot |V_z|/K) \cdot \sigma_\varepsilon \leq 2, \quad (\Delta \rho \cdot |V_\rho|/K) \cdot \sigma_\varepsilon \leq 2, \quad K \cdot \Delta t / (\sigma_\mu \cdot \Delta z^2) \leq 0,3, \quad K \cdot \Delta t / (\sigma_\mu \cdot \Delta \rho^2) \leq 0,3.$$

Неравенства следует понимать локально, т. е., например, в той части расчетной области, где коэффициент K принимает большие значения, достаточно более редкой сетки по ρ и z . При выполнении ограничений на шаги $\Delta \rho$, Δz , Δt основной вклад в погрешность вычислительной схемы вносят линеаризация и метод конечных элементов.

Оценку ошибки решения системы (1.7), (1.8), (2.1), появляющейся вследствие неточного задания исходных данных, следует производить

отдельно для каждого случая. Это обусловлено тем, что она представляет собой функционал от нескольких функций, таких как отклонения в начальных и граничных условиях для величин q , k , ε , от вектора скорости V и так далее.

Глава 4. Результаты вычислительного эксперимента. Примеры расчета переноса массы и турбулентности в струях конвективных облаков

Расчет турбулентности и концентрации аэрозоля во внутриоблачной струе производился с использованием следующих предположений:

- а) в начальный момент ($t=0$ с) величины k и ε постоянны;
- б) профиль скорости V_z такой же, как и у свободной осесимметричной незакрученной струи; ширина струи характеризуется параметром r ;
- в) скорость потоков линейно возрастает до уровня $z=h_{\max}$ (при этом $V_z=V_{\max}$), затем линейно убывает;
- г) на величины k и ε на границе области оказывает влияние только вязкая диссипация;
- д) в начальный момент на оси струи на высоте $z=0,2H$ происходит мгновенный выброс аэрозоля мощностью Q .

По вычисленным полям характеристик турбулентности находились их минимальные, максимальные и средние значения по области, а также средние по верхней части ($h_{\max} \leq z \leq H$) и по нижней части области ($0 \leq z \leq h_{\max}$). В главе обсуждались результаты с точки зрения их физической обоснованности.

Произведено сравнение результатов расчета турбулентности по k — ε -модели (см. рис. 3) и по эмпирической формуле, выражающей коэффициент турбулентности через градиенты скорости. Эмпирическая формула дает очень низкие значения коэффициента K на оси струи и практически полное отсутствие турбулентности вне струи. В то же время k — ε -модель воспроизводит некоторые эмпирические данные о турбулентности в конвективных облаках. Сюда относятся:

- сильная турбулентность в центральной части струи;
- большая турбулизованность верхней части облака по сравнению с нижней;
- медленное убывание коэффициента турбулентности в распадающихся

облаках;

- большой разброс значений скорости диссипации турбулентной энергии в пределах облака.

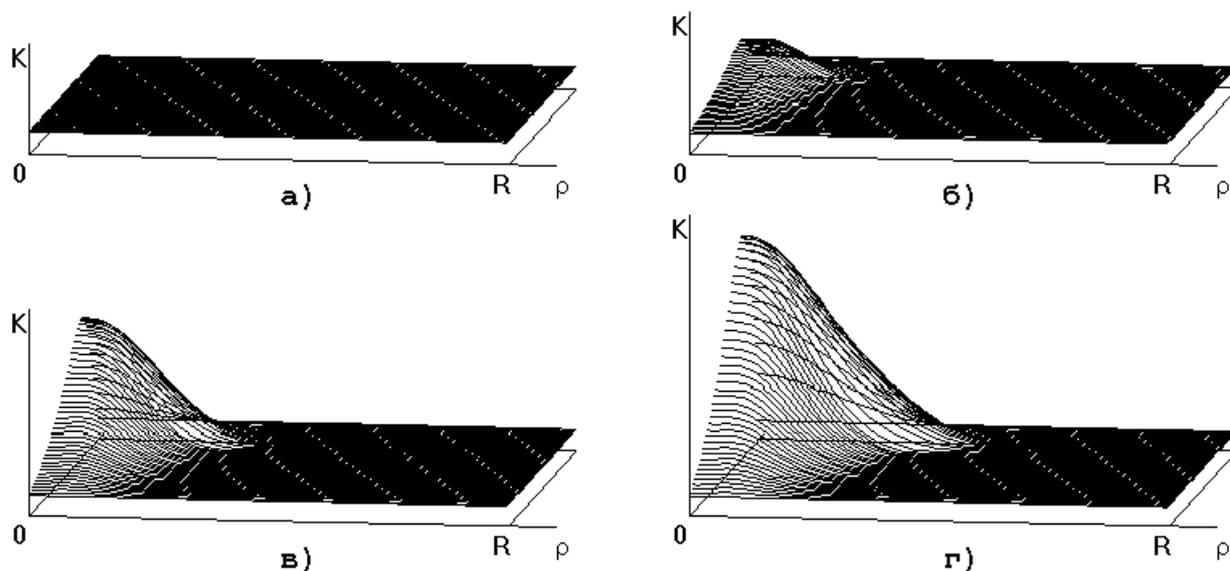


Рисунок 3 — Поле коэффициента турбулентности K , рассчитанное по k — ε -модели (а — $t=0$ с, б — $t=180$ с, в — $t=480$ с, г — $t=900$ с)

В главе проведено исследование влияния параметров струи на коэффициент турбулентности. Вычислительный эксперимент показал, что при увеличении скорости течения средние и максимальные значения K растут, а также происходит относительное усиление турбулизованности верхней части струи по сравнению с нижней. Увеличение ширины струи r приводит к росту среднего значения K ; изменение K_{\max} при этом происходит немонотонно.

Результаты расчета концентрации аэрозоля интерпретировались следующим образом: область, где концентрация q превышает некоторое критическое значение q_1 , заведомо не является зоной формирования града. Зависимость объема v этой области от времени при различных значениях q_1 приведена на рис. 4. Мощность выброса Q принималась равной $1,7 \cdot 10^{16}$ частиц.

Эти данные позволяют оценить расход реагента для кристаллизации зоны формирования осадков и время достижения желаемого эффекта.

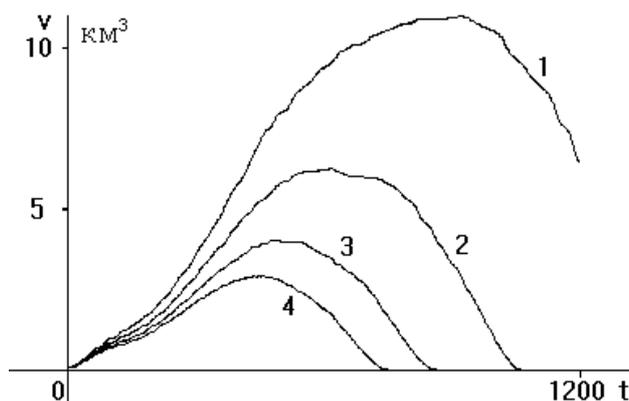


Рисунок 4 — Изменение со временем объема v области, где концентрация q реагента превышает критическое значение q_1 (1 — $q_1=6 \cdot 10^5 \text{ м}^{-3}$, 2 — $q_1=1 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}$, 3 — $q_1=1,5 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}$, 4 — $q_1=2 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}$)

Для рассмотренного примера расчета турбулентности и концентрации аэрозоля в струе проведено исследование зависимости погрешности результатов вычислений от погрешности в исходных данных. Выполнено три эксперимента: 1) в начальные условия для величины k , 2) в начальные условия для величины ϵ и 3) в значения компоненты скорости V_z — вносилась ошибка, в среднем равная 5% и не превышающая 10%. Получены средние значения относительной погрешности вычисления коэффициента турбулентности K и концентрации аэрозоля q в различные моменты времени. В главе отмечается, в частности, сильная зависимость точности расчета поля q от точности задания скорости V .

Методика численного решения задач переноса применялась к исследованию распространения примеси в пограничном слое атмосферы. В задаче аэрозоль выбрасывался линейным источником, переносился атмосферными потоками и осаждался под действием гравитации. Он попадал, в частности, на поверхность водоема, полностью поглощающую аэрозоль. Рассчитывались поля концентрации (рис. 5) и скорость поглощения примеси водоемом. Расчеты проведены для трех случаев состояния атмосферы. Первый — для слабого ветра, третий — при наличии зоны с пониженной турбулентностью. Решение задачи о скорости M потока аэрозоля в водоем позволило сделать вывод, что величина M сильно зависит от скорости ветра и практически не зависит от

наличия в верхней части пограничного слоя атмосферы области с пониженной турбулентностью.

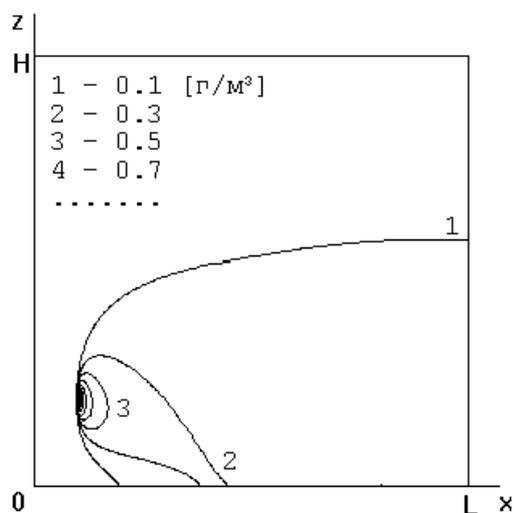


Рисунок 5 — Установившееся поле концентрации q примеси для состояния атмосферы в случае III

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Построена кинематическая модель осесимметричной струи, характерной для кучево-дождевого облака, учитывающая процессы переноса, диффузии, генерации и диссипации на развитие турбулентности. Построена модель распространения частиц реагента в облаке на основе системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

2. Сформулирована краевая задача для единой математической модели переноса массы и турбулентности, исследована ее корректность. Осуществлена редукция задачи к рекуррентным соотношениям. Линеаризация позволила решать уравнения исходной системы по отдельности. Покоординатное расщепление уменьшило размерность уравнений. Методом конечных элементов уравнение в частных производных сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Разностная схема Кранка — Николсона позволила заменить систему дифференциальных уравнений системой линейных алгебраических уравнений, для которой был применен метод прогонки.

3. Установлена сходимость построенной вычислительной схемы. Найден порядок ее аппроксимации. Проведено исследование устойчивости схемы методом энергетических норм.

4. Для машинной реализации вычислительного алгоритма создан программный комплекс, позволяющий по заданным начальным и граничным условиям рассчитывать поля характеристик турбулентности и концентрации аэрозоля, выводить их графики на экран и сохранять результаты в текстовых (в виде таблиц) и графических файлах.

5. Исследовано поведение приближенного решения в зависимости от выбранной сетки. Результаты позволили найти условия, которым должны удовлетворять шаги сетки, чтобы решения разностной и дифференциальной задач были равнозначны. Указан способ оценки погрешности вычислительной схемы.

6. Проведен вычислительный эксперимент по исследованию эволюции турбулентности и распространению аэрозоля в струе. Полученные результаты проанализированы с точки зрения их физической обоснованности. Отмечено их качественное согласие с данными метеорологических измерений.

7. Проведен расчет рассеяния примеси от прямолинейного источника в пограничном слое атмосферы. Показана применимость используемой методики для решения различных задач переноса.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Корчагин П.В. Математическое моделирование нестационарной турбулентной диффузии при помощи метода конечных элементов // Материалы III регион. конф. “Вузовская наука — Северо-Кавказскому региону”. — Ставрополь: СевКавГТУ, 1999. — С. 7.

2. Корчагин П.В. Построение вычислительной схемы для уравнения переноса с использованием метода взвешенной невязки и метода конечных элементов // Всеросс. науч. конф. “Математическое моделирование в научных исследованиях”. — Ставрополь: СГУ, 2000. — С. 55—58.

3. Корчагин П.В. Метод конечных элементов для уравнения переноса в атмосфере // Сборник трудов I регион. конф. “Проблемы компьютерных технологий и математического моделирования в естественных, технических и гуманитарных науках”. — Георгиевск: СевКавГТУ, 2001. С. 27—28.

4. Корчагин П.В. Моделирование совместного распространения реагирующих веществ // Материалы III межрегион. конф. “Студенческая наука — экономике России”. — Ставрополь: СевКавГТУ, 2002. С. 4—5.

5. Корчагин П.В. Моделирование турбулентной диффузии в осесимметричной незакрученной струе // Труды участников Междунар. школы-семинара по геометрии и анализу. — Ростов-на-Дону: РГУ, 2002. С. 198—199.

6. Корчагин П.В. Построение вычислительной схемы для двумерной задачи переноса // Сборник трудов II регион. конф. “Проблемы компьютерных технологий и математического моделирования в естественных, технических и гуманитарных науках”. — Георгиевск: СевКавГТУ, 2002. С. 38—39.

7. Корчагин П.В. Сравнение методов наименьших квадратов и взвешенной невязки // Сборник трудов III регион. конф. “Математическое моделирование и компьютерные технологии в технических, естественных и гуманитарных науках”. — Георгиевск: СевКавГТУ, 2003. С. 68—69.

8. Кириллов В.С., Корчагин П.В. Моделирование распространения загрязняющих веществ в системе атмосфера-грунт // Труды Междунар. конф. “Компьютерное моделирование 2003”. — СПб.: Нестор, 2003. С. 151—153.

9. Корчагин П.В. Построение и исследование сходимости расчетной схемы для осесимметричной задачи переноса // Вестник СевКавГТУ. Серия “Физико-химическая”. №1(8), 2004. — С. 165—169.

10. Корчагин П.В. Расчет коэффициента турбулентности в кучево-дождевом облаке // Вестник СевКавГТУ. Серия “Физико-химическая”. №1(8), 2004. — С. 169—172.

11. Корчагин П.В. Выбор сетки в методе конечных элементов для расчета потока вещества через границу при решении задачи переноса // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. — № 2, 2004. —

С. 72—74.

12. Корчагин П.В. О сходимости решения при применении метода конечных элементов // Сборник трудов IV регион. конф. “Мат. моделирование в информационных технологиях”. — Георгиевск: СевКавГТУ, 2004. С. 41—44.

Получено свидетельство № 2004612018 от 3.09.2004 г. об официальной регистрации программы для ЭВМ «Расчет переноса массы и турбулентности в струе».